Gewöhnliche Differentialgleichung: NWI
-Sophiane Yahiatene-

Aufgabe 10.1 Seien $A, B \in Mat(n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und B invertierbar.

1. Behauptung:$(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$
   Beweis durch vollständige Induktion
   (IA:)n=1
   $\surd$
   (IS:)n→n+1
   $(BAB^{-1})^{n+1} = BAB^{-1}(BAB^{-1})^n = BAB^{-1}BA^nB^{-1} = BA^nB^{-1}$

2. Behauptung: $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$

$$\exp(BAB^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BAB^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} B\frac{A^k}{k!}B^{-1} = B\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)B^{-1} = B\exp(A)B^{-1}$$

3. Berechne $\exp(A)$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   Es gilt:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{1+\sqrt{5}} & \frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Und somit gilt nach den vorherigen Aufgabenteilen

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp\left(\begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(2+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \exp(2-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 10.2

a)

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & te \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

b)

$$\exp\begin{pmatrix} t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

c) Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.3 Die explizite Differentialgleichung zweiter Ordnung $y''(x) = y(x)$ ist äquivalent zum folgenden System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ z_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\Phi(x) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(x) & \sinh(x) \\ \sinh(x) & \cosh(x) \end{pmatrix}.$$

eine Fundamentalmatrix.
Die allgemeine Lösung des Systems lautet deshalbt

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x) \\ c_1 \sinh(x) + c_2 \cosh(x) \end{pmatrix},$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind.
Nun ist die erste Komponente $z_1(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$ die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung $y''(x) = y(x)$.

Bemerkung:
Ist ein Anfangswert $y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_1$ gegeben, so hat die entsprechende Lösung des Systems den Anfangswert $\begin{pmatrix} z_1(x_0) \\ z_2(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Die Lösung des Systems lautet nun

$$\begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist auch hier die erste Kompontente des Lösungsvektors die Lösung des Anfangswertsystems
$y''(x) = y(x); y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$.
Alternativ kommt man zum selben Ergebnis, wenn man die Konstanten c_1, c_2 mit Hilfe des Anfangswertes berechnet.